УДК 656.61.052

Алексейчук Б.М., Сикирин В.Е.
НУ «ОМА»

СРАВНИТЕЛЬНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА СМЕШАННЫХ ЗАКОНОВ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОГРЕШНОСТЕЙ НАВИГАЦИОННЫХ ИЗМЕРЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМ ПУАССОНОВСКИМ ЗАКОНОМ

Как показали статистические исследования последних 30 лет, закон распределения погрешностей навигационных измерений может отличаться от нормального закона [1, 2], что обусловило поиск альтернативных законов распределения вероятностей погрешностей, в качестве которых предложены два типа смешанных законов [3] и обобщенный пуассоновский закон [4].

Сравнительный анализ указанных законов распределения для выявления аспектов их возможного применения является целью настоящей статьи.

Важной особенностью смешанных законов распределения первого и второго типа является ограничение величины их существенного параметра n [5], причем для смешанного закона первого типа максимальное значение n равно 6, а для смешанного закона второго типа - 5, а выражения для плотностей распределения первого $f_1(x)$ и второго $f_2(x)$ типа соответственно имеют следующий вид [5]:

$$f_1(x) = \frac{2^n \alpha^{n+\frac{1}{2}} n!}{\sqrt{2\pi}\ 1\cdot 3\cdot\cdot(2n-1)}\ \frac{1}{(x^2/2+\alpha)^{n+1}}, \qquad (n \le 6)$$

$$f_2(x) = \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot(2n+1)\alpha^{n+1}}{\sqrt{2}\,2^{n+1} n!}\ \frac{1}{(x^2/2+\alpha)^{n+3/2}}, \quad (n \le 5)$$

где n – существенный параметр, α – масштабный параметр.

С помощью смешанных законов распределения описываются погрешности навигационных измерений, гистограммы которых в крайних разрядах имеют избыточное относительно нормального закона число погрешностей.

Как указывается в работе [5], наряду со смешанными законами распределения для описания гистограмм погрешностей навигационных измерений с «утяжеленными хвостами» используется также обобщенный пуассоновский закон распределения, плотность распределения которого

$$f_\Gamma(\xi) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp(-c) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c^k}{k!} k^{-\frac{1}{2}} \exp(-\frac{\xi^2}{2k\sigma^2}),$$

причем в качестве базовой плотности выбрана плотность Гаусса. В приведенном выражении c – существенный параметр, σ – масштабный параметр.

Так как смешанные законы и обобщенный пуассоновский закон являются альтернативными в части описания стохастических свойств погрешностей, то необходимо произвести их сравнительный анализ для выявления рамок их возможного применения. Формы кривых плотностей указанных законов распределения зависят, как от существенного, так и масштабного параметров, поэтому корректный сравнительный анализ можно проводить при отсутствии влияния масштабного параметра, т.е. с помощью нормированных плотностей, дисперсии которых равны единице, а значение случайной величины выражается в долях среднего квадратического отклонения.

Рассмотрим выражения вначале для нормированных плотностей смешанных законов распределения. В общем случае нормированная плотность $g(\eta)$ связана со стандартной плотностью $f(\xi)$ следующим образом [6]:

$$g(x) = \sqrt{\mu_2} f(\sqrt{\mu_2} x). \qquad (1)$$

Для смешанного закона первого типа дисперсия

$$\mu_2 = \frac{2\alpha}{2n-1}, \ (n > 0)$$

поэтому нормированная плотность $g_1(\eta)$ смешанного закона первого типа

$$g_1(\eta) = \sqrt{\frac{2\alpha}{2n-1}} \frac{2^n \alpha^{n+\frac{1}{2}} n!}{\sqrt{2}\pi 1 \cdot 3 \cdot \cdot (2n-1)} \frac{1}{\left(\frac{2\alpha}{2n-1}\eta^2/2+\alpha\right)^{n+1}}, \ (n \le 6)$$

или $g_1(\eta) = \dfrac{2^n n!}{\sqrt{2n-1}\pi 1 \cdot 3 \cdot \cdot (2n-1)} \dfrac{1}{\left(\dfrac{\eta^2}{2n-1}+1\right)^{n+1}}$. $(n \le 6)$

Для смешанного закона второго типа аналитическое выражение дисперсии:

$$\mu_2 = \frac{\alpha}{n}. \ (n > 0)$$

Нормированная плотность

$$g_2(\eta) = \sqrt{\frac{\alpha}{n}}\,\frac{1\cdot 3\cdot\cdot(2n+1)\alpha^{n+1}}{\sqrt{2}\,2^{n+1}n!}\;\frac{1}{\left(\frac{\alpha}{n}\eta^2/2+\alpha\right)^{n+3/2}},\quad (n\le 5)$$

или

$$g_2(\eta)=\frac{1\cdot 3\cdot\cdot(2n+1)}{\sqrt{2n}\,2^{n+1}n!}\;\frac{1}{\left(\frac{\eta^2}{2n}+1\right)^{n+3/2}}.\quad (n\le 5)$$

Анализ нормированных плотностей для смешанных законов распределения показывает, что с увеличением существенного параметра n смешанные законы обоих типов сходятся к закону Гаусса.

Выражение для нормированной плотности обобщенного распределения Пуассона $g_{Pg}(x)$ находим, используя соотношение между нормированной $g(x)$ и $f(x)$ стандартной плотностями (1), учитывая, что в этом случае:

$$\mu_2 = c\sigma^2,$$

поэтому

$$g_{Pg}(x)=\sqrt{c}\sigma f(\sqrt{c}\sigma x)=\frac{\sqrt{c}\sigma}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp(-c)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{k!}k^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{c\sigma^2x^2}{2k\sigma^2}\right),\text{ или}$$

$$g_{Pg}(x)=\frac{\sqrt{c}\exp(-c)}{\sqrt{2\pi}}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{c^k}{k!}k^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{cx^2}{2k}\right). \qquad (2)$$

Для значений существенного параметра $c=0{,}5$ и $c=20$ рассчитывались значения нормированной плотности $g_{Pg}(x)$. Расчет производился для суммы $\sum_{k=1}^{n}\frac{c^k}{k!}k^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{cx^2}{2k}\right)$ при значениях $n=10, 20, 30$ и 40. Значения $g_{Pg}(x)$ для $n=30$ и $n=40$ совпадают до седьмого знака после запятой, поэтому в дальнейшем ограничивались $n=30$, т.е.:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{c^k}{k!}k^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{cx^2}{2k}\right)=\sum_{k=1}^{30}\frac{c^k}{k!}k^{-\frac{1}{2}}\exp\left(-\frac{cx^2}{2k}\right).$$

Так как для практических целей число факторов, формирующих погрешность линии положения, которая подчиняется обобщенному распределению Пуассона, не превосходит 40, то их математическое ожидание находится в пределах от 5 до 20. С учетом указанного обстоятельства рассчитывались нормированные плотности (2) для $c = 5 \div 20$.

В дальнейшем был проведен сравнительный анализ нормированных плотностей обобщенного распределения Пуассона $g_{Pg}(x)$ со смешанными распределениями первого $g_1(x)$ и второго $g_2(x)$ типа, который заключался в том, что вначале находилась аналитическая зависимость между существенным параметром c обобщенного распределения Пуассона и существенным параметром n смешанного распределения первого типа с одинаковым значением эксцесса $Ex^{(1)}$. Оказалось, что такая зависимость имеет вид $c = n - 1{,}5$. Для существенного параметра c в пределах от 5 до 20 определялись целочисленные значения параметра n при условии равенства эксцессов распределений. В табл. 1 приведены соответствующие значения существенных параметров c и n, имеющие одинаковый эксцесс $Ex^{(1)}$.

Таблица 1

Значения параметров c и n с одинаковым эксцессом $Ex^{(1)}$

n	6	11	16	21
$Ex^{(1)}$	0,67	0,316	0,207	0,154
c	4,5	9,5	14,5	19,5

Затем для пары нормированных плотностей $g_{Pg}(x)$ и $g_1(x)$ с одинаковым эксцессом $Ex^{(1)}$ определялась максимальная разница между соответствующими кривыми плотностей в процентах. Результаты анализа представлены в табл. 2.

Таблица 2

Сравнение плотностей при первом типе смешанного распределения

n	6	11	16	21
c	4,5	9,5	14,5	19,5
Δ, %	1,6	1,1	0,45	0,5

Аналогично анализировались расхождения кривых нормированных плотностей $g_{Pg}(x)$ и $g_2(x)$, для чего находилась зависимость между существенными параметрами c и n с одинаковым эксцессом

$Ex^{(2)}$. Упомянутая зависимость имеет вид $c = n - 1$. Соответствующие значения c и n, имеющие одинаковый эксцесс $Ex^{(2)}$, показаны в табл. 3.

Таблица 3

Значения параметров c и n с одинаковым эксцессом $Ex^{(2)}$

n	6	11	16	21
$Ex^{(2)}$	0,6	0,3	0,2	0,15
c	5	10	15	20

Максимальная разница между соответствующими кривыми нормированных плотностей в процентах, полученная в результате проведенных расчетов, представлена в табл. 4.

Анализ табл. 2 и табл. 4 показывает, что нормированные плотности смешанных распределений обоих типов при значении существенного параметра $n \geq 6$ практически совпадают с нормированными плотностями обобщенного распределения Пуассона, имеющих такое же значение эксцесса.

Таблица 4

Сравнение плотностей при втором типе смешанного распределения

n	6	11	16	21
c	5	10	15	20
Δ, %	2,1	1,0	0,42	0,8

Таким образом, с учетом данного обстоятельства подтверждается ранее принятое ограничение существенного параметра n обоих типов смешанного распределения, не превосходящего 6.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Hsu D. A. An analysis of error distribution in navigation / D. A. Hsu // The Journal of Navigation. – Vol. 32. - № 3. – P. 426 - 429.

2. Кондрашихин В. Т. Определение места судна / В.Т. Кондрашихин - М.: Транспорт, 1989. – 230 с.

3. Астайкин Д.В. Идентификация законов распределения навигационных погрешностей смешанными законами двух типов / Астайкин Д.В., Алексейчук Б.М. // Автоматизация судовых технических средств: науч. -техн. сб. – 2014. – Вып. 20. – Одесса: ОНМА. – С. 3 – 9.

4. Сикирин В.Е. Описание навигационных погрешностей с помощью обобщенного распределения Пуассона/ Сикирин В.Е.// Судовождение: сб. научн. трудов ОНМА. - 2016. - Вып. 26. – С. 152 – 156.

5. Астайкин Д.В. Оценка точности координат судна при избыточных измерениях/ Астайкин Д.В., Сикирин В.Е., Ворохобин И.И., Алексейчук Б.М. – Saarbrucken, Deutschland/ Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 с.

6. Крамер Г. Математические методы статистики / Крамер Г. - М.: Мир, 1975, 648 с.