УДК 656.61.052

Ворохобин И.И.
НУ «ОМА»

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ КООРДИНАТ СУДНА ПРИ ИЗБЫТОЧНЫХ ИЗМЕРЕНИЯХ

При обеспечении безопасного судовождения в стесненных районах плавания снижается числа навигационных аварий, возникающих из-за посадок судов на мель. Одним из существенных факторов, влияющих на безопасность судовождения, является повышение точности обсервации места судна, которое может быть достигнуто использованием избыточных линий положения и расчета обсервованных координат методом, обеспечивающим минимальную ковариационную матрицу позиционной векториальной погрешности.

Цель статьи - формирование процедуры определения эффективных координат судна при наличии избыточных измерений.

Вопросы теории и практики определения места судна методом линий положения изложены в работе [1]. В настоящей статье рассматриваются особенности определения места судна при числе линий положения больше двух, используя двумерную плотность $f(x, y)$ распределения вероятностей векториальной погрешности.

Уравнение линии положения имеет вид [1]:

$$r_i + \xi_i = x \sin \alpha_i + y \cos \alpha_i \tag{1}$$

и выражает связь элементов линии положения направления градиента α_i и переносна r_i с ее координатами x и y, учитывая погрешность линии положения ξ_i.

Найдем аналитическое выражение двумерной плотности распределения вероятностей векториальной погрешности при определении места судна по n линиям положения с погрешностями ξ_i. Известно [2], что n случайных величин ξ_i (погрешностей линий положения) можно рассматривать как координаты n-мерного пространства R_n, в котором распределена единичная плотность, причем совместная плотность распределения $g(\xi_1,...,\xi_n)$ определяется частными (маргинальными) плотностями $f_i(\xi_i)$ величин ξ_i. Плоскость R_2, на которой ищется распределение векториальной погрешности является линейным множеством пространства R_n, т.е. каждой точке плоскости R_2 соответствует точка в R_n. Точке с координатами (x, y) на плоскости R_2 соответствует точка с координатами $\xi_i = a_i x + b_i y - r_i$ пространства R_n [2]. Для рассматриваемого случая $a_i = \sin\alpha_i$ и $b_i = \cos\alpha_i$. Следовательно, связь координат R_2 и R_n:

$$\xi_i = x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i\,, \qquad (2)$$

что совпадает с уравнением линии положения (1).

Плотность $f(x, y)$ находим, подставляя (2) в выражение для совместной плотности $g(\xi_1, ..., \xi_n)$, т.е.:

$$f(x, y) = A_n g[(x\sin\alpha_1 + y\cos\alpha_1 - r_1), ..., (x\sin\alpha_n + y\cos\alpha_n - r_n)],$$

где A_n – нормирующий множитель,

$$A_n = \{\int\limits_{R_2} g[(x\sin\alpha_1 + y\cos\alpha_1 - r_1), ..., (x\sin\alpha_n + y\cos\alpha_n - r_n)]dxdy\}^{-1}.$$

Для независимых случайных величин ξ_i их совместная плотность распределения $g(\xi_1, ..., \xi_n)$ равна произведению частных плотностей $f_i(\xi_i)$.

Поэтому

$$f(x, y) = A_n \prod_{i=1}^{n} f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)\,,$$

где $A_n = \{\int\limits_{R_2} \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)dxdy\}^{-1}$.

Окончательно выражение для $f(x, y)$ принимает вид:

$$f(x, y) = \frac{\prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)}{\int\limits_{R_2} \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)dxdy}.$$

В случае зависимых погрешностей линий положения плотность распределения векториальной погрешности $f(x, y)$ может быть получена для устойчивых законов распределения погрешностей линий положения, как показано в работе [3] путем ортогонального преобразования системы зависимых погрешностей в систему независимых.

Покажем, что эффективные обсервованные координаты места судна можно получить, используя двумерную плотность $f(x, y)$ вектора погрешности определения места судна. Как ранее указывалось, плотность распределения $f(x, y)$ задана относительно конкретной системы координат, в которой x_0 и y_0 – координаты обсервованной точки.

Основная посылка определения эффективных обсервованных координат с помощью плотности $f(x, y)$ заключается в допущении, что эффективная обсервованная точка совпадает с наиболее вероятной точкой плотности $f(x, y)$. Докажем правомерность указанного допущения. Для этого найдем наиболее вероятную точку двумерной плотности $f(x, y)$, т.е. точку, в которой $f(x, y)$ достигает максимума. Полагаем, что $f(x, y)$ имеет первые частные производные.

Наиболее вероятностную точку ищем из системы уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 0 \; ; \; \frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 0 \, . \tag{3}$$

Так как плотность $f(x, y)$ для независимой системы линий положения выражается произведением плотностей независимых случайных величин, то система (3) принимает вид:

$$\frac{\partial}{\partial x}\{A_n \prod_{i=1}^{n} f_i(x \sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)\} = 0 \; ;$$

$$\frac{\partial}{\partial y} A_n \prod_{i=1}^{n} f_i(x \sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)\} = 0 \, . \tag{4}$$

Если учесть, что функция $f(x, y)$ достигает max в той же точке, что и ее логарифм, т.е. $\ln[f(x, y)]$ [4], то сокращая в системе (4) множитель A_n и заменяя произведение плотностей $f_i(x \sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)$ суммой их логарифмов, получим уравнения правдоподобия [4] , из которых находятся обсервованные эффективные координаты x_0 и y_0. Поэтому можно сделать вывод, что наиболее вероятная точка плотности $f(x, y)$ совпадает с эффективными (обладающими минимальной ковариационной матрицей) обсервованными координатами, которые могут быть получены решением системы уравнений (4). Приведем систему (4) к более удобному виду. Для первого уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = A_n \sum_{i=1}^{n} \{\frac{\partial f_i(x \sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)}{\partial x} \prod_{j \neq i}^{n} f_j(x \sin\alpha_j + y\cos\alpha_j - r_j)\} = 0 \cdot$$

Сократим постоянный множитель A_n и каждое слагаемое суммы умножим и разделим на $f_i(x \sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)$, при этом

$$\prod_{j \neq i}^{n} f_j(x\sin\alpha_j + y\cos\alpha_j - r_j) f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i) \, ,$$

следовательно

$$\frac{\partial}{\partial x} f(x,y) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i) \sum_{i=1}^{n} \{ \frac{\dfrac{\partial f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)}{\partial x}}{f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)} = 0 .$$

Очевидно, выражение перед знаком суммы, отлично от нуля, поэтому

$$\sum_{i=1}^{n} \{ \frac{\dfrac{\partial f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)}{\partial x}}{f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i)} = 0 .$$

С учетом выражения (2) по правилам дифференцирования сложной функции

$$\frac{\partial}{\partial x} f_i(x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i) = \sin\alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi} f_i(\xi) .$$

Также справедливо соотношение

$$\frac{\dfrac{\partial}{\partial \xi} f_i(\xi)}{f_i(\xi)} = \frac{\partial}{\partial \xi} \ln[f_i(\xi)] .$$

Поэтому окончательно получаем выражение для первого уравнения системы (4):

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi} \ln[f_i(\xi)] = 0 .$$

Аналогично находим выражение для второго уравнения системы (4), имеющее окончательный вид:

$$\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi} \ln[f_i(\xi)] = 0 .$$

Таким образом, получена система уравнений:

$$\sum_{i=1}^{n} \sin\alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi} \ln[f_i(\xi)] = 0 ;$$

$$\sum_{i=1}^{n} \cos\alpha_i \frac{\partial}{\partial \xi} \ln[f_i(\xi)] = 0 ; \tag{5}$$

$$\xi_{\mathrm{i}} = x\sin\alpha_i + y\cos\alpha_i - r_i .$$

При решении системы (5) необходимо вначале произвести дифференцирование по переменной ξ_{i}, а затем в полученные уравнения подставить выражение ξ_{i} из третьего уравнения. Полученную после подстановки систему двух уравнений необходимо решать относительно неизвестных x и y. Решение дает обсервованные эффективные координаты x_0 и y_0.

Таким образом, используя аналитическое выражение для двумерной плотности распределения векториальной погрешности, полученное в статье, следуя предложенному алгоритму можно рассчитать эффективные обсервованные координаты судна при наличии избыточных линий положения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кондрашихин В. Т. Определение места судна / В.Т. Кондрашихин - М.: Транспорт, 1989. – 230 с.

2. Крамер Г. Математические методы статистики / Крамер Г. - М.: Мир, 1975, 648 с.

3 Астайкин Д.В. Оценка точности координат судна при избыточных измерениях/ Астайкин Д.В., Сикирин В.Е., Ворохобин И.И., Алексейчук Б.М. – Saarbrucken, Deutschland/ Германия: LAP LAMBERT Academic Publishing, 2017. – 274 с.

4. Мудров В.М. Методы обработки измерений / Мудров В.М., Кушко В.Л. - М.: Советское радио, 1976. 192 с.